第23卷第1期(总第133期)
2005年1月

系 统 工 程
Systems Engineering

Vol. 23, No. 1
Jan. ,2005

文章编号:1001-4098(2005)01-0054-05

利率期限结构的样条估计模型及其实证研究*

吴 丹,谢 赤

(湖南大学 工商管理学院,湖南 长沙 410082)

摘 要:以B样条为基点,综合研究利率期限结构的样条估计模型,对多种样条模型进行理论推导和参数估计求解,并在此基础上做出实证比较分析。通过比较分析各个模型在利率曲线估计、债券定价和收益率估计等方面的实证结果,可以发现较少节点的三次样条模型是最为理想的。

关键词:利率期限结构;零息票利率曲线;远期利率曲线;样条估计

中图分类号:F823 **文献标识码**:A

零息票利率曲线和远期利率曲线是利率期限结构的曲线表示形式。它们是金融行业中最为基本和重要的工具,在金融行业中的应用非常广泛,包括衡量和洞察市场预期以支持执行货币政策;检验利率期限结构理论;证券定价;识别证券的理论价值与市场价值的偏离,等等。然而,零息票利率和远期利率是无法从市场中直接观察到的,因为在绝大多数的债券市场中,只有期限不超过一年的短期债券才表现出纯贴现债券价格。所以,必须从可观察到的长期息票债券价格和短期零息票债券价格中估计出隐含的利率期限结构。

传统的直接推导方法是利息剥离法,然而它要求收集一组具有相同的息票到期日并且相互之间不存在线性关系的债券,而这是相当困难的。因此,大量的间接推导方法应运而生,样条法就是其中非常重要和广为应用的一类方法。它们都具有这样一个共同特点:需要根据提前决定的零息票利率曲线形式来调整有关数据。

样条估计法的主要原理是将整个期限坐标划分为若干子区间,对每个子区间分别进行利率期限结构的估计,同时必须对期限子区间的划分施加一些限制条件,以确保得到连续平滑的利率期限结构。

McCulloch是将样条方法应用于利率期限结构估计的开拓者,他于1971年提出了二次样条法(quadratic spline),将贴现函数假设为一个二次多项式[1];1975年提出了三次样条法(cubic spline),将贴现函数假设为一个三次多项式[2]。后者已经成为标准的收益率曲线估计方法。Bliss, Waggoner, Bolder 和 Gusba 的研究均发现,无论是样本内还是样本外,三次样条法都很稳定,并且对债券的定价也很精确[3-5]。

进一步,Fisher 等人提出了平滑三次样条法(Smoothing cubic spline),它与McCulloch三次样条法的关键不同是,在最小化的目标函数中添加了一个粗糙修正项(roughness penalty),该修正项可以控制曲线平滑程度与拟合程度之间的此消彼长。这样,通过调整粗糙修正项可以减少样条的波动,从而使三次样条的形状变得更为平滑。他们使用了广义交叉验证法(Generalized Cross Validation)来确定对修正项的调整[6]。

国内方面,谢赤和钟赞采用插值法对德国和法国的零息票收益率曲线进行了研究[7],然而这实际上是一种传统直接推导方法,因此在应用上存在局限性和主观性。杨春鹏和曹兴华采用回归插补法和三次样条插值法对到期收益率曲线进行了估计[8],但是到期收益率曲线由于息票的影响无法正确反映利率期限结构,并且该方法实际上也是一种传统直接推导方法。

本文将从B样条这一角度出发,综合多种模型,对利率期限结构的样条估计方法进行深入理论研究,并做出实证比较分析。

1 利率期限结构的基本理论

利率期限结构估计模型的研究对象并不单一,根据不同的研究目的需要,可以选择贴现函数、零息票利率或者

* **收稿日期**:2004-10-22;**修订日期**:2004-11-27
基金项目:国家社会科学基金资助项目(03BJY099);教育部博士点专项科研基金资助项目(20020532005);全国高校青年教师奖励基金资助项目
作者简介:吴丹(1979-),女,湖南大学工商管理学院博士研究生,研究方向:金融工程与金融管理。

瞬时远期利率。然而，事实上这些不同对象具有内在一致性，因此有必要弄清楚它们之间的关系。

假设当前时刻为 t，定义 T 时刻到期的单位纯贴现债券价格为 $d(t,T)$，其代表了贴现函数；$z(t,T)$ 为 t 到 T 时刻的零息票利率；$f(t,T)$ 为 t 时刻观察到的 T 时刻瞬时远期利率。那么贴现函数、零息票利率以及瞬时远期利率的关系可表述为

$$d(t,T)=e^{-(T-t)z(t,T)}$$

$$z(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u\right) \tag{1}$$

$$f(t,T)=z(t,T)+(T-t)z'(t,T)$$

了解贴现函数、零息票利率和瞬时远期利率三者的关系式将有助于运用不同的模型对利率期限结构进行估计。

2　利率期限结构的样条估计方法

尽管 McCulloch 所做出的三次样条估计是开创性的和卓越的，但由于其所选取的基函数形式，在估计过程中，回归矩阵的列向量很可能存在完全共线性问题，因而导致估计的不精确[2]。Steely 提出使用 B 样条作为基函数，由于 B 样条的特性，有效提高了估计的精确性[9]。因此，本文将运用 B 样条为基函数来研究三次样条模型、平滑样条的三类模型。

2.1　B 样条方法

本文所要运用的 B 样条其本身也是一个三次多项式所构成的三次样条。其特点在于它只在 4 个相邻的子区间内取正值，在其余的区间取值为 0。所以，当定义一个 B 样条序列，其中每个 B 样条分别定义于各自的 4 个相邻子区间内，那么整个区间上的任意一个子区间内都只会有 4 根非零 B 样条通过。更为重要的是，这样的 B 样条是构成三次样条空间的基函数，任何一个三次样条都可以由 B 样条序列的线性组合来表示；同时，由于 B 样条的定义域非常狭窄，它们的线性组合计算也比较简便和稳定。

首先，任意定义一个区间 $[a,b]$，该区间被 $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 这 m 个结点分割成 $m-1$ 个子区间，$k_1=a$，$k_m=b$. 该方法的原理就在于，运用定义在这 m 个结点上的一组 B 样条的线性组合来拟合 $[a,b]$ 上的曲线。一般来说，一个 n 次多项式所构成的 B 样条被称为 $n+1$ 阶 B 样条。由于本文所研究的 McCulloch 三次样条模型和平滑样条模型均是采用三次样条，因此需要运用 4 阶 B 样条作为基函数。用 $B_{i,n}(x)$ 表示 n 阶 B 样条序列中的第 i 个 B 样条，它的定义式是一个递归式：

$$B_{i,n}(x)=\frac{x-k_i}{k_{i+n-1}-k_i}B_{i,n-1}(x)+\frac{k_{i+n}-x}{k_{i+n}-k_{i+1}}B_{i+1,n-1}(x)$$

其中

$$B_{i,1}(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,k_i)\\ 1, & x\in[k_i,k_{i+1})\\ 0, & x\in[k_{i+1},\infty)\end{cases}$$

对于本研究所关注的 $B_{i,4}$，由上述两式可以直接计算出它在任意点 $x\in[k_i,k_{i+1}]$ 的值。并且从中可以看出 4 阶 B 样条的特点：对任意 B_i，它只在 $[k_i,k_{i+4}]$ 这 4 个子区间内取值非零；而在任意 $[k_i,k_{i+1}]$ 中，只有 B_{i-3}，B_{i-2}，B_{i-1}，B_i 这 4 根样条取值非零。值得注意的是，当对结点序列 $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 共 m 个结点构建基函数时，需要 $\{B_{-2},B_{-1},\cdots,B_{m-1}\}$ 共 $m+2$ 个 B 样条，而定义这 $m+2$ 个样条需要 $\{k_{-2},k_{-1},\cdots,k_{m+3}\}$ 共 $N+6$ 个结点组成的序列——称为扩展的结点序列。

现在就得到了在结点序列 $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 下，由 4 阶 B 样条线性组合而成的三次样条函数

$$S(x)=\sum_{i=-1}^{m-1}\theta_i B_i(x) \tag{2}$$

其中，θ_i 为待估系数。

2.2　三次样条模型

定义：P_i = 第 i 个债券的价格；c_{ij} = 第 i 个债券的第 j 笔现金流；τ_{ij} = 第 i 个债券的第 j 笔现金流的贴现时间长度；m_i = 第 i 个债券未偿还的现金流笔数；N = 所观察的债券数目。显然，第 i 个债券价格即是各期现金流的贴现之和：

$$P_i=\sum_{j=1}^{m}c_{ij}d(\tau_{ij})=c_i^T\tilde{d}(\tau_i)$$

其中

$$c_i=[c_{i1}\ \ \cdots\ \ c_{im_i}]^T$$

$$\tilde{d}(\tau_i)=[d(\tau_{i1})\ \ \cdots\ \ d(\tau_{im_i})]^T$$

现在运用式(2)所示的 B 样条基函数线性组合成的三次样条来拟合债券价格。

定义扩展的结点序列 $\{d_i,i=1,\cdots,k+6:0=d_1=d_2=d_3=s_1<s_2<\cdots<d_{k+4}=d_{k+5}=d_{k+6}=s_k=T\}$。由 $K=k+2$ 根 B 样条构成的三次样条 $S(t)$ 在 $t\in[0,T]$ 的值为 $S(t)=[B_1(t),\ \ \cdots\ \ B_K(t)][\theta_1\ \ \cdots\ \ \theta_K]^T$。将 $S(t)$ 直接拟合利率期限结构中的贴现函数，也就是令 $d(t)=S(t)$，所得到的第 i 个债券的理论价格为

$$\hat{P}_i(\theta)=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}d(\tau_{ij})=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}S(\tau_{ij})=c_i^T\tilde{B}(\tau_i)\theta$$

其中，$\tilde{B}(\tau_i)=\begin{bmatrix}B_1(\tau_{i1}) & \cdots & B_K(\tau_{i1})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ B_1(\tau_{im_1}) & \cdots & B_K(\tau_{im_1})\end{bmatrix}=[\tilde{B}_1(\tau_i)\ \ \cdots\ \ \tilde{B}_K(\tau_i)]$，$\theta=[\theta_1\ \ \cdots\ \ \theta_K]^T$.

令 $P=[P_1\ \ \cdots\ \ P_N]^T$，$X=[c_1^T\tilde{B}(\tau_1)\ \ \cdots\ \ c_N^T\tilde{B}(\tau_N)]^T$，运用最小二乘估计方法，通过最小化理论价格与实际价格的偏差这一目标函数：

$$\min_\theta(P-X\theta)^TW(P-X\theta) \tag{3}$$

从而得到系数 θ 的估计值为

$$\theta^*=(X^TWX)^{-1}X^TWP$$

2.3 平滑样条模型

在三次样条估计模型中，随着结点数目增加，样条的对观测数据的拟合程度也随之增大。然而，精确的拟合并非唯一的研究目的，整个样条也需要具有一定程度的平滑。通过降低结点数目能够增加样条的平滑度，却同时又会导致了拟合度的明显下降。通过在最小化目标函数(3)上添加一个粗糙修正项，这一问题可以得到一定的解决。该粗糙修正项定义为 $g(S)\equiv\int_a^b (S''(x))^2\mathrm{d}x$，可以看出，$S(x)$越平滑，$g(S)$就越接近零。所以，该函数的最小化可以实现平滑度的最优。

(1) 平滑样条贴现模型

与三次样条模型相同，将$S(t)$直接拟合利率期限结构中的贴现函数。不同的是，其最小化目标函数增加了粗糙修正项，为

$$\min_\theta (P-X\theta)^T W(P-X\theta)+\lambda g(S) \tag{4}$$

通过控制系数λ的大小，可以决定拟合与平滑之间的孰轻孰重。

进而运用线性最小二乘法，求得参数估计为

$$\theta^*=(X^TWX+\lambda D^TD)^{-1}X^TWP$$

(2) 平滑样条零息票利率模型

除了用$S(t)$拟合贴现函数之外，还可以灵活选择将$S(t)$拟合利率期限结构的其他部分。这里，选择用$S(t)$来拟合零息票利率$z(t)$的函数。令$S(t)=tz(t)$，结合式(1)，债券的理论价格则为

$$\begin{aligned}\hat{P}_i(\theta)&=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}d(\tau_{ij})=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\exp(-B(\tau_{ij})\theta)\\&=c_i^T\exp(-\tilde{B}(\tau_i)\theta)\end{aligned}$$

参数θ的估计仍然需要通过最小化式(4)来求得，然而在本模型中这是一个非线性最优化问题，运用非线性最优化问题求解方法，例如一阶泰勒级数近似法，可以得到收敛解。

(3) 平滑样条远期利率模型

最后，选择用$S(t)$拟合瞬时远期利率$f(t)$。令$S(t)=f(t)$，结合式(1)，债券理论价格为

$$\hat{P}_i(\theta)=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}d(\tau_{ij})=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\exp\left(-\int_0^{\tau_{ij}}B(u)\theta\mathrm{d}u\right) \tag{5}$$

定义 $\beta(t)=\left[\int_0^t B_1(u)\mathrm{d}u\ \cdots\ \int_0^t B_K(u)\mathrm{d}u\right]=\int_0^t B(u)\mathrm{d}u$，则式(5)可简化为

$$\hat{P}_i(\theta)=\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\exp(-\beta(\tau_{ij})\theta)=c_i^T\exp(-\tilde{\beta}(\tau_i)\theta)$$

其中

$$\tilde{\beta}(\tau_{ij})=\begin{bmatrix}\int_0^{\tau_{i1}}B_1(u)\mathrm{d}u & \cdots & \int_0^{\tau_{i1}}B_K(u)\mathrm{d}u\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \int_0^{\tau_{im_i}}B_1(u)\mathrm{d}u & \cdots & \int_0^{\tau_{im_i}}B_K(u)\mathrm{d}u\end{bmatrix}$$

同样，可以运用一阶泰勒级数近似方法获得参数估计。

3 利率期限结构样条模型的实证研究

结合前文对各模型参数估计的讨论，本文将对上述多种利率期限结构样条模型进行实证比较分析。

对模型进行实证比较之前，必须明确模型的评价标准。所有上述模型都不可避免地面临这样一个矛盾：对现实数据的拟合精确度与相应零息票利率曲线的平滑度之间总是此消彼涨。准确的拟合固然非常重要，然而所估计曲线的适当平滑也必不可少。过分追求拟合度将使得利率水平在不同的期限之间发生剧烈摇摆，而这是不符合现实情况和经济原理的；过分追求平滑度则会导致模型无法对债券进行精确定价。如何确定这两个评价标准之间的相对权重呢？这取决于研究的应用目的。如果需要对债券进行定价，那么模型的拟合能力将更为重要，即便如此也需要适度平滑，因为样本内估计过度精确很容易导致样本外估计失败；如果需要利用利率期限结构获得某时点市场对利率水平的总期望，那么应该选择相对平滑的曲线，但同样也不能放弃精确度，否则将可能错失隐含在债券价格中的重要经济信息。

因此，本文将从两个方面对模型进行实证考察：实证之一主要考察模型的准确性；实证之二主要考察模型的稳定性。实证所用数据为美国 1995 年 3 月 20 日 235 种国库券的相关资料及交易价格，运用 Matlab 和 Mathemaica 软件编程进行计算。

3.1 考察模型准确性的实证研究

该实证研究的具体方法为：在同一样本数据下分别对各个模型进行估计，通过比较分析利率曲线图和统计指标，获得关于各个模型拟合能力及曲线构建能力的结论。实证结果见图 1 至图 5 及表 1。图中，实线部分为估计的零息票利率曲线，虚线部分为估计的远期利率曲线，横轴表示期限长度，纵轴表示利率水平。平滑样条估计过程中，参数λ的确定采用了 Fisher 等所提出的广义交叉验证法[6]。

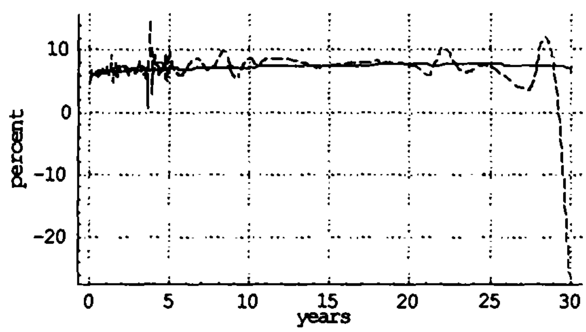

图 1 三次样条模型(较多节点数目)

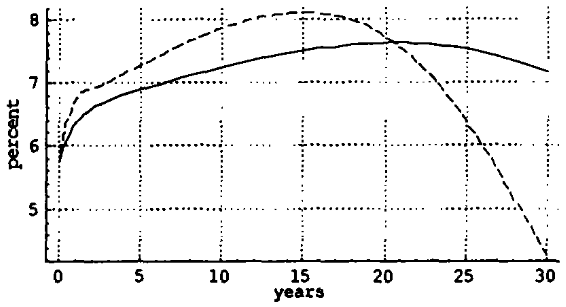

图 2 三次样条模型(较少节点数目)

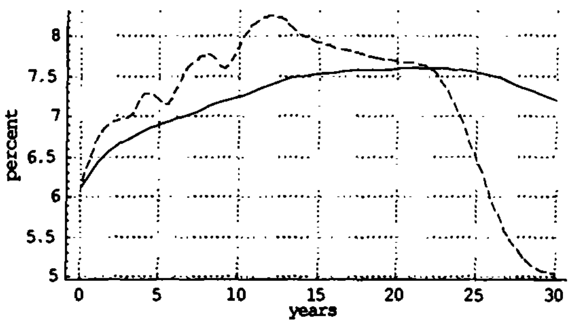

图 4 平滑样条零息票利率模型

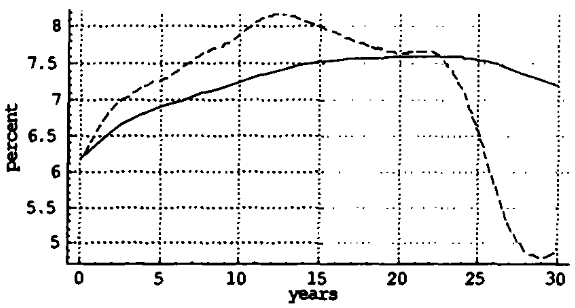

图 3 平滑样条贴现模型

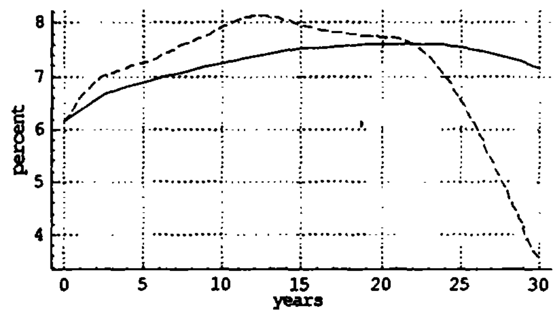

图 5 平滑样条远期利率模型

表 1 利率期限结构样条模型估计误差统计

指标 \ 模型	三次样条模型（较多节点）	三次样条模型（较少节点）	平滑样条贴现模型	平滑样条零息票利率模型	平滑样条远期利率模型
价格误差平均绝对值	0.1065	0.1337	0.1391	0.1269	0.1348
收益率误差平均绝对值(%)	4.4362	4.8493	9.0990	6.8777	8.4859

注：实下划线数据表示同一指标中的最小值，虚下划线数据表示同一指标中的最大值。

3.2 考察模型稳定性的实证研究

该实证研究是采用截面验证方法：从样本中剔除一只债券后估计出模型在该样本下的参数，运用所估参数计算被剔除债券的理论价格及其估计误差，然后将该债券放回样本，剔除另一只债券并重复前述估计过程，直至所有债券均被剔除过，这样就可以得到一组样本外债券的价格估计数据，由估计误差统计指标可以了解各个模型在样本变化下的稳定性如何。实证结果见表 2。

表 2 利率期限结构样条模型样本外估计误差统计

指标 \ 模型	三次样条模型（较多节点）	三次样条模型（较少节点）	平滑样条贴现模型	平滑样条零息票利率模型	平滑样条远期利率模型
价格估计误差平均绝对值	1.6691	1.6658	1.6768	1.6709	1.6711
收益率估计误差平均绝对值(%)	1.2500	1.2453	1.2652	1.2612	1.2579

注：实下划线数据表示同一指标中的最小值，虚下划线数据表示同一指标中的最大值。

3.3 实证结果分析

(1)各个模型所估计零息票利率曲线形状相差不大。图 1 至图 5 的零息票利率曲线都大致始于 6%左右，并逐渐上扬至大约 7.6%，然后渐渐下滑至大约 7.2%.

(2)各个模型所估计的远期利率曲线形状有所区别。根据图 1、三次样条模型在节点较多条件下，所估计的远

期利率曲线出现了剧烈波动，特别是在期限坐标的近端，而且远期利率曲线末端还出现巨幅下滑，使得整个利率曲线图形压缩变小。根据图 2 至图 5，其余模型所估计的远期利率曲线波动则相对小得多，但形状也各自有所区别，然而这些区别只是集中于 3～13 年这一区域的几个波动存在大小不同，其中平滑样条零息票利率模型的波动相对突出，各模型的远期利率曲线的总体趋势则基本相同。

(3)各个模型的估计精度与远期利率曲线摆动程度大致成正比。多节点三次样条与平滑样条零息票利率模型在估计误差上表现相对较好，然而它们所估计的远期利率曲线摆动也都相对较大。特别是多节点的三次样条，无论在价格估计误差平均值还是收益率估计误差平均值上均是模型中最小的，表明其估计精度最优，然而该模型所估计的远期利率曲线图却存在剧烈摆动，这表明该模型过度追求准确性，导致了利率曲线的不合理摆动。其中，少节点三次样条模型似乎处于较理想的折中状况。

(4)各个模型的稳定性表现相差不大。表 2 中各模型在样本外的估计误差水平相近，少节点三次样条相对最优。比较表 1 和表 2，可以发现模型对样本内的价格估计普遍优于样本外，然而对样本内的收益率估计却普遍劣于样本外，这可能是因为实证中的样本内参数估计是以最小化价格估计误差为目标函数，从而以收益率估计误差增加为代价，而样本内的价格拟合度追求导致了模型在样本外表现出相反的估计能力。

(5)综合各个模型在曲线估计、价格和收益率的样本内、外估计等方面的表现，较少节点的三次样条模型应该是最佳选择。

4 结论

通过对利率期限结构的三次样条多节点模型、三次样条少节点模型、平滑样条贴现模型、平滑样条零息票利率模型、平滑样条远期利率模型的理论推导和实证比较分析，可以发现不同模型在利率曲线估计、样本内、外的债券定价和收益率估计方面表现有所不同。所以，应当根据利率期限结构模型的应用目的来确定该选择哪一个模型。综合来看，较少节点的三次样条模型应该是最佳选择。

值得注意的是，各个模型所估计的远期利率曲线形状有较大区别，因此，当需要利用远期利率曲线进行经济分析时，应当慎重选择估计模型、或者寻求其它模型作为纠错补充。

参考文献：

[1] McCulloch J H. Measuring the term structure of interest rates[J]. Journal of Business, 1971, 44: 19～31.

[2] McCulloch J H. The tax-adjusted yield curve[J]. Journal of Finance, 1975, 30: 811～830.

[3] Bliss R R. Testing term structure estimation methods[J]. Advances in Futures and Options Research, 1997, 9: 197～232.

[4] Waggoner D F. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices[R]. 1997.

[5] Bolder D J, Gusba S. Exponentials, polynomials, and Fourier series: more yield curve modelling at the Bank of Canada [R]. 2002.

[6] Fisher M, Nychka D, Zervos D. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines[R]. 1995.

[7] 谢赤，钟赞. 插值法在零息收益曲线构造中的应用[J]. 数量经济技术经济研究，2002，4：92～94.

[8] 杨春鹏，曹兴华. 我国国债收益率曲线的构造与实证研究[J]. 人大复印报刊资料：投资与证券，2002，10：80～82.

[9] Steely J. Estimating the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals[J]. Journal of Business, Finance and Accounting, 1991, 18: 512～529.

Estimating the Term Structure of Interest Rates with Spline-based Models

WU Dan, XIE Chi

(College of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Using the B-spline basis, this paper presents a comprehensive research on the spline-based estimation models of the term structure of interest rates. Theoretical derivation and parameters' estimation are given, based on which an empirical comparison is made furthermore. By comparing and analysing the empirical results of all models on yield curve estimation, bonds pricing and yield estimation, it can be found that the cubic spline model with fewer knots is the best.

Key words: Term Structure of Interest Rates; Zero-coupon Rate Curve; Forward Rate Curve; Spline Estimation